שיעור 9 – נורמות

# הגדרה

נורמה על מרחב וקטורים V(מעל או ) היא פונקציה המקיימת:

1. *וגם ⬄*
2. *אי שוויון המשולש:*

# דוגמאות

1. נורמה סטנדרטית על או
2. נורמת p:
3. נורמת

# הגדרה

1. וקטור v נקרא נורמלי(או ווקטור יחידה) אם .
2. אוסף הווקטורים הנורמלים נקרא מעגל היחידה.

# המשך דוגמאות

1. בהינתן מכפלה פנימית על V ניתן להגדיר את הנורמה המושרית על ידי

## הערה

אם היא המ"פ הסטנדרטית ב או ב אזי הנורמה המושרית היא הנורמה הסטנדרטית (תרגיל)

# תרגיל

הוכח את כלל המקבילית: תהי נורמה המושרית ממכפלה פנימית(לאו דווקא סטנדרטית). הוכח כי

## פתרון

# "הגדרה"

נרמול של ווקטור הוא

# הגדרה

ווקטורים u וv נקראים אורתוגונליים(ביחס למ"פ נתונה ) ("מאונכים") אם

# תרגיל

תהי S קבוצה אורתוגונלית שלא כוללת את האפס. הוכח כי S בת"ל.

## הוכחה

נניח בשלילה כי S ת"ל. אזי קיים צירוף לינארי כאשר שונים ולפחות לאיזשהו i.  
אולם, לכל , ולכן אך וגם וזו סתירה.

# תהליך גרם-שמידט

בהינתן בסיס למרחב וקטורי עם מכפלה פנימית ונורמה מושרית, רוצים למצוא בסיס המורכב מוקטורים נורמליים אורתוגונליים *זה לזה("אורתונורמלי")*

*עושים כדלקמן:*



וכן הלאה.

## דוגמה

בצע גרם שמידט ל לפי מ"פ סטנדרטית

# תרגיל: אי שוויון קושי שוורץ

הוכח כי

## פתרון

לפי גרם שמידט, אם אזי כאשר

# הגדרה

מטריצה נקראת אוניטרית אם

*(תזכורת: )*

# תרגיל

הוכח שהתכונות הבאות שקולות

1. A אוניטרית
2. עמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי
3. שורות A מהוות בסיס אורתונורמלי

## פתרון

(1)⬄(3)  
נסמן   
אם (1) אזי *ולכן כלומר (3).*

*ואם (3) אז דומה.*